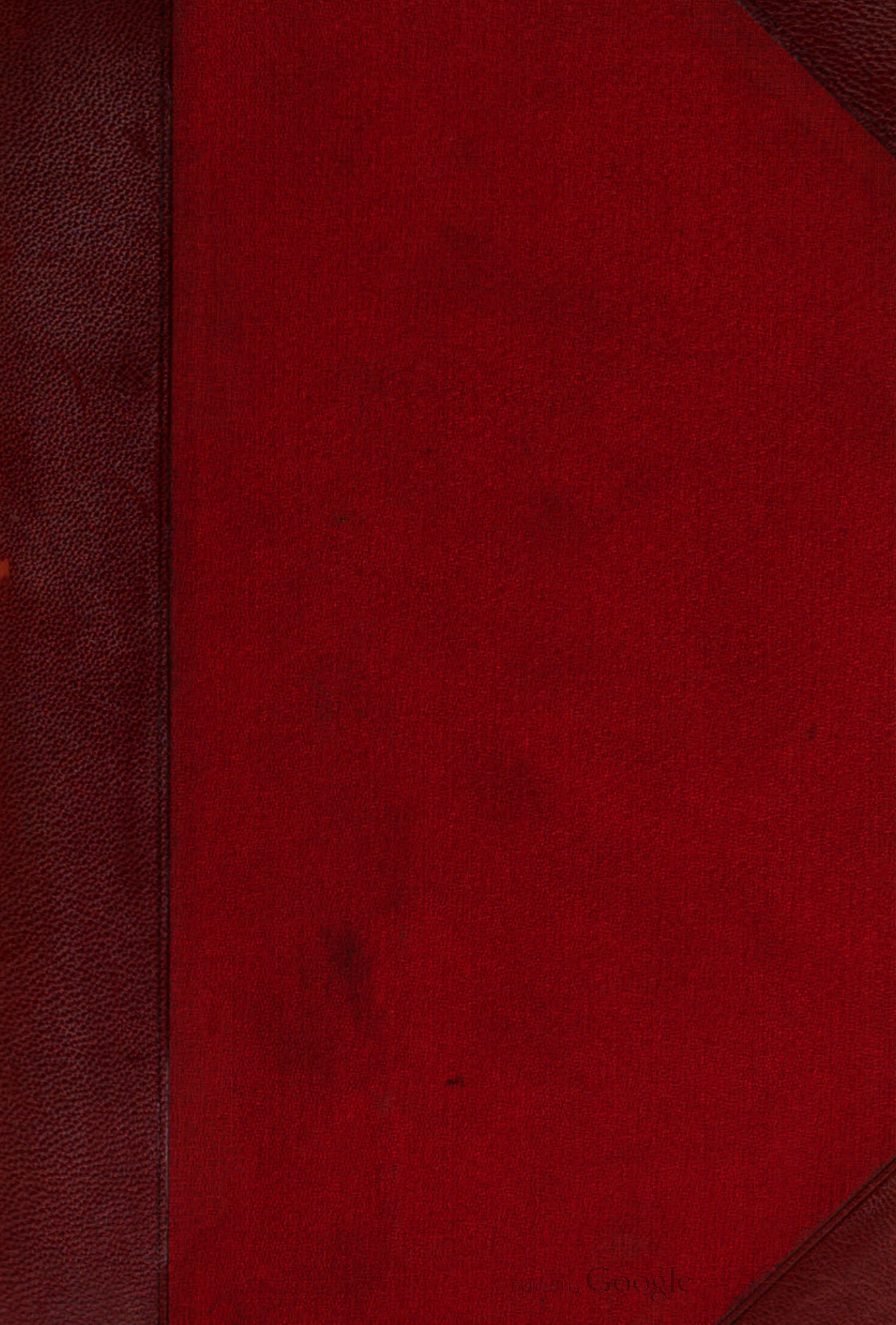
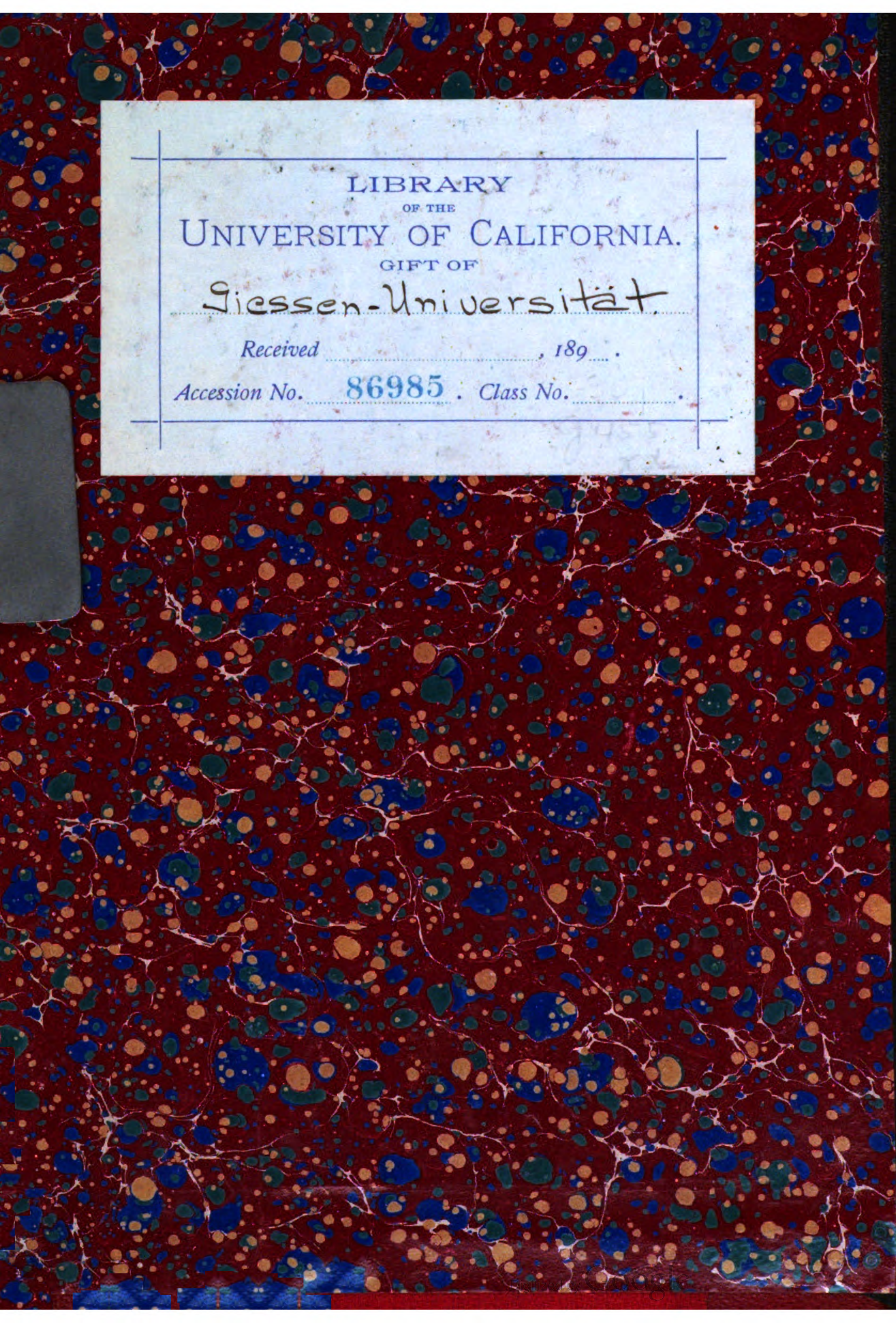
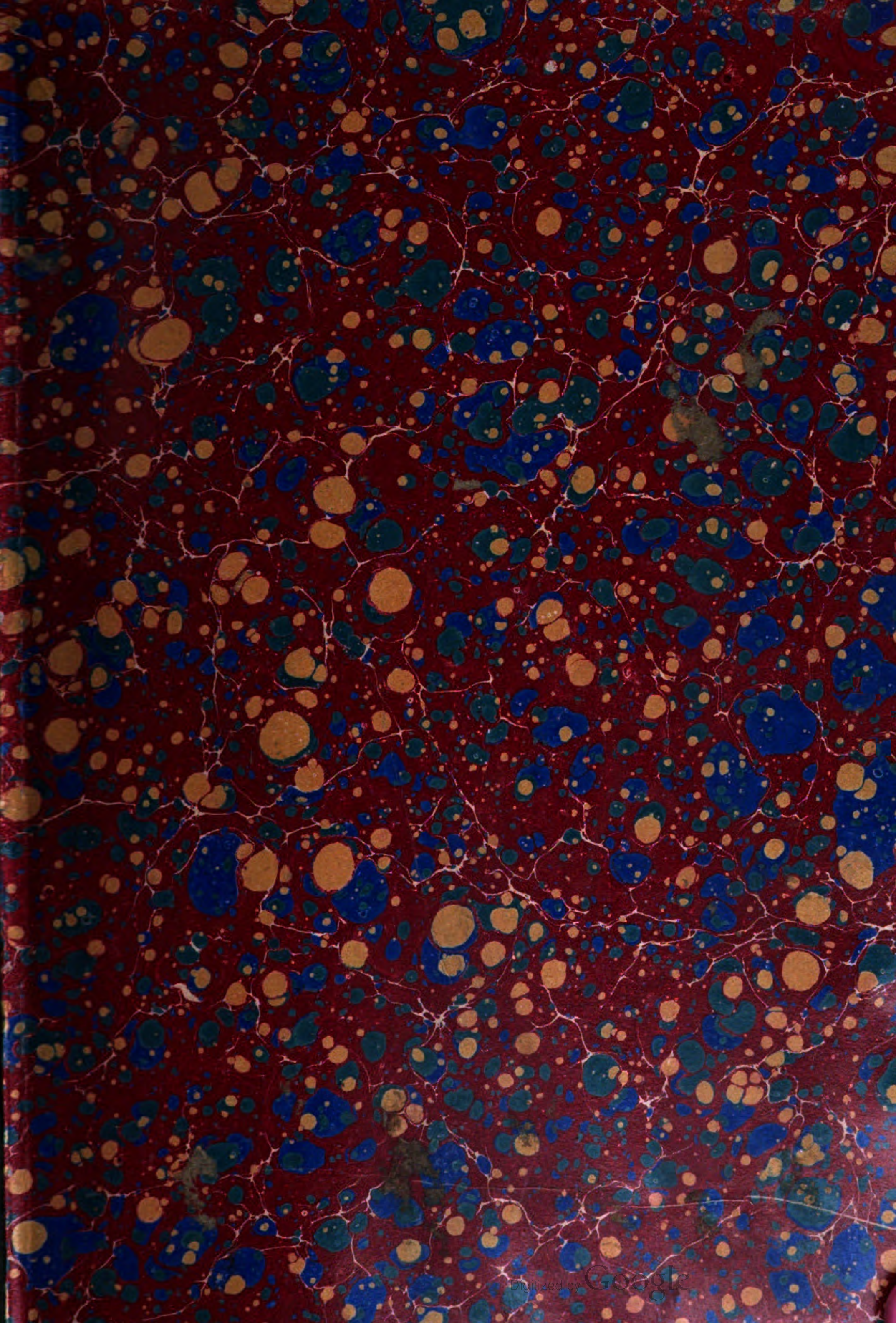




LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.
GIFT OF
Giessen-Universität
Received , 189 .
Accession No. 86985 . Class No. .



ANALYTISCHE BEHANDLUNG

EINIGER GRUNDPROBLEME DER

PROJEKTIVEN GEOMETRIE.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

BEI DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT ZU GIESSEN

EINGEREICHT

VON

WILHELM LOOS
AUS GIESSEN.

GIESSEN.
DRUCK VON EDUARD OTTMANN.
1896.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf je zwei gleichartige ebene Grundgebilde 1. Stufe, welche projektiv aufeinander bezogen und in perspektiver Lage befindlich sein sollen. Da dies auf vielfach unendliche Weise möglich ist, so lassen sich die mannigfaltigsten Fragen aufwerfen bezüglich gewisser Gesetzmässigkeiten, welche stattfinden, sobald man den Stücken einer solchen Figur gewisse Beschränkungen auferlegt. Von diesen Fragen sollen die folgenden hier ihre Beantwortung finden.

I. Der perspektive Durchschnitt sei beweglich, die Träger der Grundgebilde aber fest. Wie bewegt sich der perspektive Durchschnitt?

II. Ein Element des perspektiven Durchschnittes und einer der Träger seien fest, der andre Träger aber beweglich. Wie bewegt sich dieser Träger?

III. Zwei Elemente des perspektiven Durchschnittes seien fest, die beiden Träger aber beweglich. Wie bewegen sich diese Träger?

Jede dieser Fragen hat eine doppelte Behandlung zu erfahren, einmal für perspektive Strahlbüschel und dann für perspektive Punktreihen. Man könnte zu der Annahme versucht sein, dass, wenn eine Frage etwa für die Strahlbüschel gelöst sei, die auf die Punktreihen bezügliche Antwort durch polare Übertragung jener sich ergeben müsste. Nun soll aber in den Aufgaben vorausgesetzt werden, dass Strahlbüschel und Punktreihen bei ihren Bewegungen sich selbst congruent bleiben; dies aber ist nicht der Fall bei derjenigen Punktreihe, welche auf der Polare des Trägers eines seiner Gestalt nach gegebenen beweglichen Strahlbüschels angeordnet ist, und deren Elemente die Pole der Strahlen des Büschels sind; ebensowenig trifft dies zu bei dem Strahl-

büschel, dessen Elemente die Polaren der Elemente einer gewissen Punktreihe mit beweglichem Träger sind. Deswegen müssen die Untersuchungen getrennt geführt werden für Strahlbüschel und für Punktreihen.

I.

a) Zwei projektiv aufeinander bezogene Strahlbüschel sollen sich in perspektiver Lage befinden; ihre Scheitel seien fest, die Büschel um sie drehbar. Welche Curve umhüllt der perspektive Durchschnitt, wenn die Büschel sich bei stets perspektiver Lage um ihre Scheitel drehen?

(Fig. 1.) Die perspektive Beziehung ist bestimmt, sobald 3 Strahlen des einen Büschels 3 Strahlen des andern zugeordnet sind. OL und O'L, OM und O'M, ON und O'N seien solche homologe Strahlenpaare. Zur Vereinfachung der Rechnung trägt es bei, ohne deren Allgemeinheit zu beschränken, wenn wir unter ON den zu OL senkrechten Strahl des Büschels O verstehen, unter OM denjenigen, der den rechten Winkel LON halbiert. Dem Winkel LOM $= \frac{\pi}{4}$ entspricht der Winkel LO'M $= \alpha$, dem Winkel LON $= \frac{\pi}{2}$ der Winkel LO'N $= \beta$. In perspektiver Lage befinden sich die Strahlbüschel, wenn die Punkte L, M und N auf einer geraden Linie g, dem perspektiven Durchschnitte, liegen. Der Abstand der beiden Scheitel sei dann OO' $= 2\,a$.

Bei perspektiver Lage der Büschel wählen wir die O und O' verbindende Gerade zur Abscissenaxe, die Mittelsenkrechte der Strecke OO' zur Ordinatenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems. Der Strahl OL möge den Winkel φ, O'L den Winkel ψ mit der positiven Richtung der Abscissenaxe bilden. Die Gleichung des perspektiven Durchschnittes g sei

$$\frac{\xi}{s} + \frac{\eta}{t} = 1.$$

Die Strahlen OL, OM, ON haben der Reihe nach die Gleichungen:

$$(\xi + a) \sin \varphi = \eta \cos \varphi; \quad (\xi + a)(\cos \varphi + \sin \varphi) = \eta (\cos \varphi - \sin \varphi);$$
$$(\xi + a) \cos \varphi = -\eta \sin \varphi,$$

die Strahlen O'L, O'M, O'N:

$$(\xi - a) \sin \psi = \eta \cos \psi; \quad (\xi - a) \sin (\psi - \alpha) = \eta \cos (\psi - \alpha);$$
$$(\xi - a) \sin (\psi - \beta) = \eta \cos (\psi - \beta).$$

Nun soll die Gerade $\frac{\xi}{s} + \frac{\eta}{t} = 1$ durch die Schnittpunkte von OL und O'L, von OM und O'M, von ON und O'N gehen, d. h. in den Punkten L, M und N sollen sich je drei gerade Linien schneiden, nämlich:

in L:

$$(\xi + a) \sin \varphi = \eta \cos \varphi;$$
$$(\xi - a) \sin \psi = \eta \cos \psi;$$
$$\frac{\xi}{s} + \frac{\eta}{t} = 1;$$

in M:

$$(\xi + a)(\cos \varphi + \sin \varphi) = \eta (\cos \varphi - \sin \varphi);$$
$$(\xi - a) \sin(\psi - \alpha) = \eta \cos(\psi - \alpha);$$
$$\frac{\xi}{s} + \frac{\eta}{t} = 1;$$

in N:

$$(\xi + a) \cos \varphi = -\eta \sin \varphi;$$
$$(\xi - a) \sin (\psi - \beta) = \eta \cos (\psi - \beta);$$
$$\frac{\xi}{s} + \frac{\eta}{t} = 1.$$

Dies aber erfordert das Verschwinden von drei Determinanten 3. Grades, und es muss sein

1) $\sin \varphi [(s + a) t \cos \psi + 2 a s \sin \psi] - \cos \varphi [(s - a) t \sin \psi] = 0;$

2) $\sin \varphi [(s + a) t \cos(\psi - \alpha) + (2as + (s-a)t) \sin(\psi - \alpha)] +$
$+ \cos \varphi [(s+a) t \cos (\psi - \alpha) + (2as - (s-a)t) \sin(\psi - \alpha)] = 0;$

3) $\sin \varphi [(s - a) t \sin (\psi - \beta)] +$
$+ \cos \varphi [(s + a) t \cos(\psi - \beta) + 2as \sin(\psi - \beta)] = 0.$

Wenn es gelingt, aus diesen drei Gleichungen φ und ψ zu eliminieren, so erhält man eine Beziehung zwischen s und t (und den Constanten der Aufgabe), die Gleichung der Geradenschar, welche der perspektive Durchschnitt bei der Drehung der Strahlbüschel durchläuft. Es erübrigt dann noch, die Einhüllende dieser Schar zu finden.

Sollen die Gleichungen 1) und 3) eine gemeinsame Lösung $\sin \varphi : \cos \varphi$ besitzen, so lauten, wenn wir der Über-

sichtlichkeit wegen vorübergehend folgende Abkürzungen gebrauchen:

$$(s+a)^2 t^2 = A, \qquad 4a^2 s^2 + (s-a)^2 t^2 = B,$$
$$2ast(s+a) = C, \qquad (s^2-a^2)t^2 \sin\alpha = D,$$

die beiden Determinantenbedingungen:

$$A\cos\psi\cos(\psi-\beta) + B\sin\psi\sin(\psi-\beta) + C\sin(2\psi-\beta) = 0,$$
$$A\cos\psi\cos(\psi-\alpha) + B\sin\psi\sin(\psi-\alpha) + C\sin(2\psi-\alpha) + D = 0.$$

Durch Addition und Subtraktion erhält man hieraus:

$$2A\cos\psi\cos\left(\psi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2B\sin\psi\sin\left(\psi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$+ 2C\sin\left(2\psi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + D = 0,$$

$$-2A\cos\psi\sin\left(\psi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\frac{\alpha-\beta}{2} + 2B\sin\psi\cos\left(\psi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$+ 2C\cos\left(2\psi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\frac{\alpha-\beta}{2} - D = 0.$$

Wird die erste dieser Gleichungen durch $2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, die zweite durch $-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ dividiert, und bezeichnet man

$$\frac{D}{2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = E, \qquad \frac{D}{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} = F,$$

so ergiebt sich

$$A\cos\psi\cos\left(\psi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + B\sin\psi\sin\left(\psi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right) +$$
$$+ C\sin\left(2\psi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + E = 0,$$

$$A\cos\psi\sin\left(\psi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - B\sin\psi\cos\left(\psi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right) -$$
$$- C\cos\left(2\psi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + F = 0.$$

Wir multiplicieren die erste Gleichung mit $\cos\left(\psi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, die zweite mit $\sin\left(\psi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, darauf die erste mit $\sin\left(\psi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, die zweite mit $-\cos\left(\psi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, addieren jedesmal und erhalten:

$$\sin\psi\left[C + E\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + F\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right] +$$

$$+ \cos\psi\left[A + E\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - F\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right] = 0,$$

$$\sin\psi\left[B + E\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - F\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right] +$$

$$+ \cos\psi\left[C - E\sin\frac{\alpha+\beta}{2} - F\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right] = 0.$$

Beide Gleichungen haben eine gemeinsame Lösung $\sin\psi : \cos\psi$, wenn

$$C^2 - \left(E\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + F\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 = AB +$$

$$+ (A+B)\left(E\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - F\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \left(E\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - F\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$$

oder:

$$C^2 - E^2 - F^2 = AB + (A+B)\left(E\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - F\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Damit ist auch ψ eliminiert. Setzt man noch die Werte von A, B u. s. w. ein, so erhält man die gewünschte Gleichung zwischen den Coordinaten s und t des perspektiven Durchschnittes:

$$(s^2-a^2)\,t^2\left(\frac{m}{s^2} + \frac{n}{t^2} - 1\right) = 0,$$

wobei gesetzt ist

$$a^2\,\frac{\sin^2(\alpha-\beta) + \sin^2\alpha + 2\sin(\alpha-\beta)\sin\alpha\sin\beta}{\sin^2(\alpha-\beta) + \sin^2\alpha - 2\sin(\alpha-\beta)\sin\alpha\sin\beta} = m,$$

$$4\,a^2\,\frac{\sin(\alpha-\beta)\sin\alpha\sin\beta}{\sin^2(\alpha-\beta) + \sin^2\alpha - 2\sin(\alpha-\beta)\sin\alpha\sin\beta} = n.$$

1) $s = +a$ bedeutet die Schar der Geraden, die sich im Punkte O, $s = -a$ die Schar derjenigen, die sich in O′ schneiden. Um zu untersuchen, welche Individuen dieser Scharen als perspektive Durchschnitte in unsrer Figur auftreten können, setzen wir zuerst $s = a$, dann auch $s = -a$ in die Ausgangsgleichungen 1), 2) und 3) (S. 5) ein, um die zugehörigen Werte von t kennen zu lernen. Für $s = a$ lauten diese Gleichungen, nach Funktionen von ψ geordnet:

$$1')\ \cos\psi\ t\sin\varphi + \sin\psi\ a\sin\varphi = 0,$$

$$2')\ \cos\psi(\cos\varphi + \sin\varphi)(t\cos\alpha - a\sin\alpha) +$$
$$+ \sin\psi(\cos\varphi + \sin\varphi)(t\sin\alpha + a\cos\alpha) = 0,$$

$$3')\ \cos\psi\cos\varphi(t\cos\beta - a\sin\beta) + \sin\psi\cos\varphi(t\sin\beta + a\cos\beta) = 0.$$

Hieraus folgt durch Elimination von ψ, wenn man die im allgemeinen von Null verschiedenen Faktoren $\sin\alpha$ und $\sin\beta$ weglässt

$$(t^2+a^2)\sin\varphi\cos\varphi = 0, \qquad (t^2+a^2)\sin^2\varphi = 0.$$

Beide Gleichungen sind erfüllt a) für $t^2+a^2=0$, was keine reellen Werte von t liefert, b) für $\sin\varphi = 0$, also $\cos\varphi = \pm 1$; hierfür aber würden die Gleichungen 2′) und 3′) nach Elimination von ψ liefern:

$$(t^2+a^2)\sin(\beta-\alpha) = 0,$$

also ebenfalls $t^2+a^2=0$, da $\sin(\beta-\alpha)$ im allgemeinen nicht verschwindet. $s = a$ liefert also keine reellen Werte für t. — Eine ähnliche Rechnung ergiebt dasselbe Resultat für $s = -a$. — 2) $t = 0$ hat $s = 0$ im Gefolge; dieser Fall ist indessen in 3) $\frac{m}{s^2} + \frac{n}{t^2} = 1$ oder $m t^2 + n s^2 = s^2 t^2$ enthalten.

Die Gleichung

$$m t^2 + n s^2 = s^2 t^2$$

liefert also die allgemeine Lösung; sie ordnet im allgemeinen jedem Werte von t zwei entgegengesetzt gleiche Werte von s zu. Jedem Werte von t entsprechen also im allgemeinen zwei und nur zwei Geraden der Schar; nur für $t = 0$ ergeben sich scheinbar unendlich viele Geraden, nämlich die ganze Schar derer, die durch den Coordinatenanfangspunkt gehen. Wir können indessen leicht untersuchen, welcher Grenzlage sich die beiden einem bestimmten Werte von t entsprechenden Geraden nähern, wenn t allmählich der Grenze Null zugeführt wird; diese Lagen allein sind dann solche, die eventuell der perspektive Durchschnitt für $t = 0$ einnehmen kann.

Bezeichnet k den Richtungsfaktor der Geraden $\frac{\xi}{s} + \frac{\eta}{t} = 1$, so ist $s = -\frac{1}{k}t$, und die Gleichung unsrer Geradenschar kann geschrieben werden:

$$t^2 [m k^2 + n - t^2] = 0,$$

$$k^2 = \frac{t^2 - n}{m} \cdot \frac{t^2}{t^2}; \quad \lim_{t=0} k^2 = -\frac{n}{m}.$$

Bei $t = 0$ existieren also für k zwei reelle und entgegengesetzt gleiche Werte, wenn m und n verschiedene Vorzeichen haben; von den durch den Coordinatenanfang gehenden Geraden kommen hiernach als perspektive Durchschnitte nur diejenigen in Betracht, deren Gleichungen lauten:

$$\frac{\eta}{\xi} = \pm \sqrt{-\frac{n}{m}}.$$

Nunmehr kann die Gleichung für die Schar unsrer Geraden geschrieben werden:

$$m k^2 + n = t^2.$$

Ein Individuum dieser Schar hat dann die Gleichung:

$$\eta = k \xi + t, \text{ oder: } t = \eta - k \xi.$$

Dieses t werde in die vorige Gleichung eingetragen:

$$(\eta - k \xi)^2 = m k^2 + n.$$

Eliminiert man k aus dieser Gleichung und ihrer Ableitung nach k, so erhält man:

$$(n \xi^2 + m \eta^2 - m n)(\xi^2 - m) = 0.$$

Diese Gleichung ist erfüllt 1) für $n \xi^2 + m \eta^2 = m n$, oder

$$\frac{\xi^2}{m} + \frac{\eta^2}{n} = 1,$$

2) für $\xi = \pm \sqrt{m}$. Das erstere bedeutet einen Kegelschnitt, dessen Mittelpunkt der Coordinatenanfang ist, dessen Axen die Coordinatenaxen sind; $\xi = \pm \sqrt{m}$ sind nichts weiter, als die Tangenten in den Schnittpunkten des Kegelschnittes mit der Abscissenaxe; 2) liefert also nichts Neues, denn diese Tangenten sind unter der übrigen Schar schon enthalten.

Der perspektive Durchschnitt umhüllt also bei seiner Bewegung den Kegelschnitt

$$\frac{\xi^2}{m} + \frac{\eta^2}{n} = 1.$$

Die Abscissen der Brennpunkte dieses Kegelschnittes sind

$$e = \pm\sqrt{m-n} = \pm\sqrt{a^2} = \pm a,$$

d. h. die Scheitel O und O′ der sich um sie drehenden Strahlbüschel sind die Brennpunkte. Diese Abscissen sind von α und β unabhängig, d. h. die Kegelschnitte, die bei festen Mittelpunkten und beliebigen projektiven Strahlbüscheln herauskommen, sind alle confocal. Es sind stets Ellipsen oder Hyperbeln, niemals Kreise, Parabeln oder ausgeartete Kegelschnitte. Ellipsen entstehen, wenn m und n gleiche, Hyperbeln, wenn sie entgegengesetzte Vorzeichen haben; im letzteren Falle gehören auch die oben besprochenen Geraden

$$\frac{\eta}{\xi} = \pm\sqrt{-\frac{n}{m}}$$

zu den Tangenten, es sind die Asymptoten. Eine Hyperbel ist der Kegelschnitt, wenn $2\sin(\alpha-\beta)\sin\alpha\sin\beta$ negativ und dem absoluten Betrage nach kleiner ist als $\sin^2(\alpha-\beta)+\sin^2\alpha$; in allen anderen Fällen ist er eine Ellipse.

b) Zwei projektiv aufeinander bezogene gerade Punktreihen sollen sich in perspektiver Lage befinden; ihre Träger seien fest, die Punktreihen aber innerhalb derselben verschiebbar (natürlich so, dass sie sich selbst congruent bleiben). Welche Curve beschreibt bei stets perspektiver Lage der Punktreihen der perspektive Durchschnitt, wenn die Punktreihen sich innerhalb ihrer Träger verschieben?

(Fig. 2.) Die projektive Beziehung sei bestimmt durch die Zuordnung der Punkte P_0 und Q_0, P_1 und Q_1, P_x und Q_x; diese Punkte mögen von dem Schnittpunkte der Träger folgende Abstände haben:

auf dem Träger P:	auf dem Träger Q:
P_0 den Abstand p;	Q_0 den Abstand q;
P_1 „ „ $p+1$;	Q_1 „ „ $q+d_1$;
P_x „ „ ∞;	Q_x „ „ $q+d$.

Wir wählen die Träger zu Coordinatenaxen. S sei der perspektive Durchschnitt und habe die Coordinaten $\xi|\eta$.

Bei perspektiver Lage der Punktreihen müssen nun mit $S = \xi|\eta$ in gerader Linie liegen:

1) $P_0 = p|0$; 2) $P_1 = p + 1|0$; 3) $P_\infty = \infty|0$;
und $Q_0 = 0|q$; und $Q_1 = 0|q + d_1$; und $Q_\infty = 0|q + d$.

Mithin müssen drei Determinanten 3. Grades verschwinden, und diese liefern

1) $q\xi + p\eta = pq$,

2) $(q + d_1)\xi + (p + 1)\eta = (p + 1)(q + d_1)$,

3) $\eta = q + d$.

Werden hieraus p und q eliminiert, so erhält man die gewünschte Beziehung zwischen ξ, η und den Constanten der Aufgabe, d. h. die Gleichung des Ortes von S. Man erhält

$$q = \eta - d,$$

und wenn man noch $d - d_1 = d_2$ setzt:

$$p\,d + \xi(\eta - d) = 0,$$
$$p\,d_2 + \xi(\eta - d_2) + d_2 = 0.$$

Dies giebt

$$\xi\eta = -d\frac{d_2}{d_1}.$$

Dies aber ist die Gleichung einer Hyperbel, bezogen auf die Asymptoten als Axen. Der perspektive Durchschnitt S beschreibt also bei der gedachten Bewegung der Punktreihen eine Hyperbel, deren Asymptoten die festen Träger sind.

Ändert man die Zuordnung der projektiven Punktreihen, so ändert sich zwar die rechte Seite der Gleichung $\xi\eta =$ const., die Asymptoten aber bleiben invariant. Dies ist das Analogon zu der Invarianz der Brennpunkte in I a).

II.

a) Von zwei perspektiv liegenden Strahlbüscheln habe das eine einen festen, das andre einen beweglichen Scheitel. Der perspektive Durchschnitt sei drehbar um einen seiner Punkte.

Welche Curve beschreibt der bewegliche Scheitel, wenn der perspektive Durchschnitt sich um seinen festen Punkt dreht?

(Fig. 3). Wir legen der Betrachtung ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde, dessen Abscissenaxe derjenige Strahl OL des festen Büschels sei, welcher durch den Drehpunkt L des perspektiven Durchschnittes geht, während der feste Scheitel O selbst den Coordinatenanfangspunkt bilden möge. Ordinatenaxe ist also dann der zu OL senkrechte Strahl ON. Behufs projektiver Beziehung beider Büschel aufeinander sollen zugeordnet sein die Strahlen OL und O'L, OM und O'M, ON und O'N, und zwar möge OM den rechten Winkel LON halbieren; entsprechende Winkel sind also LOM $= \frac{\pi}{4}$ und LO'M $= \alpha$, LON $= \frac{\pi}{2}$ und LO'N $= \beta$. Die Winkel, welche die Strahlen O'L, O'M, O'N mit der positiven Richtung der Abscissenaxe bilden, seien bezl. λ, μ, ν. Die Abscisse des Punktes L sei a. Die Coordinaten von O' mögen $\xi | \eta$ heissen. Bezeichnet man mit $x | y$ laufende Coordinaten, so lauten die Gleichungen der Strahlen OL, OM, ON bezl.:

$$y = 0, \qquad y = x, \qquad x = 0,$$

diejenigen der Strahlen O'L, O'M, O'N:

$$(y - \eta)\cos\lambda = (x - \xi)\sin\lambda; \quad (y - \eta)\cos\mu = (x - \xi)\sin\mu;$$
$$(y - \eta)\cos\nu = (x - \xi)\sin\nu.$$

Hieraus berechnen sich folgende Werte für die Coordinaten der Punkte L, M und N:

$$x_l = \frac{\eta\cos\lambda - \xi\sin\lambda}{-\sin\lambda}, \qquad y_l = 0,$$

$$x_m = \frac{\eta\cos\mu - \xi\sin\mu}{\cos\mu - \sin\mu}, \qquad y_m = \frac{\eta\cos\mu - \xi\sin\mu}{\cos\mu - \sin\mu},$$

$$x_n = 0, \qquad y_n = \frac{\eta\cos\nu - \xi\sin\nu}{\cos\nu}.$$

Bei perspektiver Lage der Strahlbüschel müssen diese Punkte in gerader Linie liegen; hierzu aber ist das Verschwinden einer Determinante 3. Grades nötig, nämlich:

$$\begin{vmatrix} x_l & y_l & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_n & y_n & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \eta\cos\lambda - \xi\sin\lambda & 0 & -\sin\lambda \\ \eta\cos\mu - \xi\sin\mu & \eta\cos\mu - \xi\sin\mu & \cos\mu - \sin\mu \\ 0 & \eta\cos\nu - \xi\sin\nu & \cos\nu \end{vmatrix}}{-\sin\lambda(\cos\mu - \sin\mu)\cos\nu} = 0.$$

Wir gehen darauf aus, λ, μ und ν hieraus zu eliminieren. Dies geschieht leicht durch folgende Beziehungen:

$$\mu = \lambda - \alpha, \qquad \nu = \lambda - \beta, \qquad \operatorname{tg}\lambda = \frac{\eta}{\xi - a}.$$

Bevor aber von diesen Beziehungen Gebrauch gemacht wird, ist es zweckmässig, die Determinante auszurechnen und in folgender Weise umzugestalten:

$$\begin{vmatrix} \eta\cos\lambda - \xi\sin\lambda & 0 & -\sin\lambda \\ \eta\cos\mu - \xi\sin\mu & \eta\cos\mu - \xi\sin\mu & \cos\mu - \sin\mu \\ 0 & \eta\cos\nu - \xi\sin\nu & \cos\nu \end{vmatrix} =$$

$$= \sin\lambda\,[\xi\eta\sin\alpha\cos\beta - \eta^2\sin\alpha\sin\beta - \xi^2\sin(\alpha-\beta)] -$$
$$- \cos\lambda\,[\xi\eta\sin\alpha\sin\beta + \eta^2\sin\alpha\cos\beta - \xi\eta\sin(\alpha-\beta)].$$

Hierzu tritt in unsrer ursprünglichen Gleichung noch der Faktor

$$\frac{1}{-\sin\lambda(\cos\mu - \sin\mu)\cos\nu} = \frac{1}{\sin\lambda\,[\sin(\lambda-\alpha) - \cos(\lambda-\alpha)]\cos(\lambda-\beta)}.$$

Macht man nun Gebrauch von der Beziehung $\operatorname{tg}\lambda = \frac{\eta}{\xi - a}$ oder

$$\sin\lambda = \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + (\xi - a)^2}}, \qquad \cos\lambda = \frac{\xi - a}{\sqrt{\eta^2 + (\xi - a)^2}},$$

so lautet unsre Gleichung, welche die perspektive Lage der Strahlbüschel zum Ausdruck bringt:

$$\frac{[\eta^2 + (\xi - a)^2]\,[(\xi^2 + \eta^2)\sin\alpha\sin\beta - a\xi(\sin\alpha\sin\beta - \sin(\alpha-\beta)) - a\eta\sin\alpha\cos\beta]}{[(\xi - a)\cos\beta + \eta\sin\beta]\,[(\xi - a)(\sin\alpha + \cos\alpha) + \eta(\sin\alpha - \cos\alpha)]} = 0.$$

Der gesuchte Ort besteht mithin aus dem reellen Kreise

$$\xi^2 + \eta^2 - a\,\xi\left(1 - \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\,\sin\beta}\right) - a\,\eta\,\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = 0$$

und dem imaginären Geradenpaar

$$\eta^2 + (\xi - a)^2 = 0 \text{ oder } \eta = \pm i\,(\xi - a).$$

Dem reellen Schnittpunkte $L = a \,|\, 0$ dieser imaginären Geraden entspricht indessen keine reelle Lage der Strahlen des Büschels O'; denn die Büschel könnten, wenn O' nach L fallen soll, nur dann perspektiv liegen, wenn die Strahlen $O'L$ und OL zusammenfielen. Dann aber ginge der perspektive Durchschnitt nicht durch L. Analytisch giebt sich dieser Sachverhalt darin zu erkennen, dass für $\xi = a$, $\eta = 0$ nicht nur der Zähler, sondern auch der Nenner auf der linken Seite unsrer Gleichung verschwindet.

Der Kreis, welcher somit den reellen Ort von O' darstellt, geht durch den Punkt O. Seine Gleichung kann geschrieben werden

$$(\xi - a\,k)^2 + (\eta - a\,l)^2 = a^2(k^2 + l^2),$$

wenn man $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\,\sin\beta}\right) = k$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = l$ bezeichnet.

Durchläuft nun L die ganze Abscissenaxe, d. h. a alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, so entsteht eine Schar von Kreisen, welche sämtlich durch O gehen, und deren Mittelpunkte auf der Geraden

$$l\,\xi - k\,\eta = 0$$

liegen. Diese Kreise berühren sich also sämtlich in O. Ausgezeichnet ist unter ihnen derjenige, welcher einem unendlich grossen a entspricht; seine Gleichung wird gefunden, wenn man alle Glieder ohne a vernachlässigt:

$$k\,\xi + l\,\eta = 0.$$

Es ist die auf dem Ort der Mittelpunkte senkrecht stehende gemeinsame Tangente aller Kreise der Schar.

Durchläuft der Punkt L die Gerade $\eta = 0$, so beschreibt der Mittelpunkt des Kreises die Gerade $\eta = \frac{l}{k}\,\xi$; wenn nun L eine Gerade $\eta = C\,\xi$ durchläuft, so wird derselben eine Gerade $\eta = D\,\xi$ als Ort der

Mittelpunkte entsprechen. Es entsteht die Frage: In welcher Weise hängt D von C ab, oder nach was für einem Gesetz sind die Strahlen des Büschels $\eta = C\,\xi$ denen des Büschels $\eta = D\,\xi$ zugeordnet?

(Fig. 4). $O\bar{L}$ sei der Strahl, auf welchem der Drehungspunkt $\bar{L}$ des perspektiven Durchschnittes sich jetzt bewegen soll. Er bilde mit OL den Winkel φ; der zugeordnete Winkel des Büschels O′ sei $LO'\bar{L} = \omega$. Innerhalb des um den Winkel φ gedrehten Coordinatentsystems (Axen: $O\bar{L}$, $O\bar{N}$) hat dann der $O\bar{L}$ zugeordnete Ort der Mittelpunkte die Gleichung

$$\bar{l}\,\bar{\xi} = \bar{k}\,\bar{\eta}.$$

Unsre nächste Aufgabe sei, den Richtungsfaktor $\bar{l} : \bar{k}$ als Funktion von φ zu finden.

Wir betrachten die Doppelverhältnisse der Strahlen $O\bar{L}$, $O\bar{M}$ und $O\bar{N}$ mit OL, OM, ON: sie sind der Reihe nach gleich denen von $O'\bar{L}$, $O'\bar{M}$ und $O'\bar{N}$ mit O′L, O′M, O′N:

$$O\,(\bar{L}, L, M, N) = O'\,(\bar{L}, L, M, N),$$
$$O\,(\bar{M}, L, M, N) = O'\,(\bar{M}, L, M, N),$$
$$O\,(\bar{N}, L, M, N) = O'\,(\bar{N}, L, M, N).$$

Die erste Gleichung lautet mit Einführung der Winkel:

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} : \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\omega}{\sin(\beta - \omega)} : \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

Bezeichnet man die Winkel $\bar{L}O'\bar{M} = \bar{\alpha}$, $\bar{L}O'\bar{N} = \bar{\beta}$, so braucht man nur φ durch $\varphi + \frac{\pi}{4}$ und ω durch $\omega + \bar{\alpha}$ zu ersetzen, um zu der zweiten, φ durch $\varphi + \frac{\pi}{2}$ und ω durch $\omega + \bar{\beta}$, um zu der dritten Gleichung zu gelangen. Nach leichten Umformungen und mit Einführung unsrer Bezeichnungen $1 - \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha\,\sin\beta} = 2\,k$, $\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = 2\,l$ erhalten wir alsdann:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\omega\,[2\,l\,\operatorname{tg}\varphi + (2\,k - 1)],$$
$$\operatorname{tg}\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}(\omega + \bar{\alpha})\left[2\,l\,\operatorname{tg}\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + (2\,k - 1)\right],$$
$$\operatorname{tg}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}(\omega + \bar{\beta})\left[2\,l\,\operatorname{tg}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + (2\,k - 1)\right].$$

Wir drücken noch die Tangenten der Winkelsummen durch diejenigen der Summanden aus und bezeichnen $\operatorname{tg}\varphi = t$, $\operatorname{tg}\omega = s$, die Constante $2k - 1 = m$:

$$1)\ t = s\,(2\,l\,t + m),$$

$$2)\ \frac{1+t}{1-t} = \frac{s + \operatorname{tg}\bar{\alpha}}{1 - s\operatorname{tg}\bar{\alpha}}\left[2\,l\,\frac{1+t}{1-t} + m\right],$$

$$3)\ -\frac{1}{t} = \frac{s + \operatorname{tg}\bar{\beta}}{1 - s\operatorname{tg}\bar{\beta}}\left[2\,l\left(-\frac{1}{t}\right) + m\right].$$

Wir gehen darauf aus, $\bar{l} : \bar{k}$ als Funktion von t zu finden. Nun ist

$$2\,\bar{l} = \frac{\cos\bar{\beta}}{\sin\bar{\beta}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\bar{\beta}},\quad 2\,\bar{k} = 1 - \frac{\sin(\bar{\alpha} - \bar{\beta})}{\sin\bar{\alpha}\,\sin\bar{\beta}} = 1 - \frac{1}{\operatorname{tg}\bar{\beta}} + \frac{1}{\operatorname{tg}\bar{\alpha}}.$$

Demgemäss berechnen wir $\operatorname{tg}\bar{\alpha}$ aus 2), $\operatorname{tg}\bar{\beta}$ aus 3) und eliminieren s mittels 1), wonach

$$s = \frac{t}{2\,l\,t + m}$$

ist. Auf diese Weise wird gefunden:

$$\operatorname{tg}\bar{\alpha} = \frac{m\,(1 + t^2)}{m\,(2\,l + m) + 4\,t\,(m\,l + n) + t^2\,(1 - 2\,m\,l + 4\,l^2)},$$

wenn man die auch im Folgenden auftretende Constante $1 - m^2 + 4\,l^2$ mit $4\,n$ bezeichnet. In ähnlicher Weise findet man:

$$\operatorname{tg}\bar{\beta} = \frac{m\,(1 + t^2)}{2\,m\,l\,(1 - t^2) + 4\,n\,t}.$$

Hiernach ist

$$2\,\bar{l} = \frac{2\,m\,l + 4\,n\,t - 2\,m\,l\,t^2}{m\,(1 + t^2)},$$

$$2\,\bar{k} = \frac{m\,(1 + m) + 4\,m\,l\,t + (1 + m + 4\,l^2)\,t^2}{m\,(1 + t^2)}.$$

Bezeichnet $\bar{\varphi}$ den Winkel, den der jetzige Ort der Mittelpunkte mit $O\bar{L}$ bildet, ψ denjenigen, den er mit OL bildet, so ist $\operatorname{tg}\bar{\varphi} = \bar{l} : \bar{k}$ und $\psi = \varphi + \bar{\varphi}$, $\operatorname{tg}\psi = \frac{t + \operatorname{tg}\bar{\varphi}}{1 - t\,.\operatorname{tg}\bar{\varphi}}$.

Wird noch $4\,n = 1 - m^2 + 4\,l^2$ eingesetzt, und hebt man durch $(1 + t^2)$, so entsteht

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{2\,m\,l + (m + m^2 + 4\,n)\,t}{m\,(1 + m) + 2\,m\,l\,t}$$

Somit befinden sich $\operatorname{tg}\psi$ und $t = \operatorname{tg}\varphi$ in linearer Abhängigkeit voneinander, d. h. die concentrischen Strahlbüschel $\eta = \operatorname{tg}\varphi\,.\,\xi$ und $\eta = \operatorname{tg}\psi\,.\,\xi$ sind projektiv.

Haben diese concentrischen projektiven Strahlbüschel vielleicht Doppelstrahlen? In diesem Falle muss $t = \operatorname{tg}\psi$ werden können, oder:

$$2\,m\,l\,t^2 - 4\,n\,t - 2\,m\,l = 0.$$

Diese Gleichung hat reelle Wurzeln, wenn

$$n^2 + m^2\,l^2 \geqq 0$$

ist. Als Summe zweier Quadrate aber ist dieser Ausdruck niemals < 0. Es sind also stets reelle Doppelstrahlen vorhanden und zwar im allgemeinen zwei verschiedene. Sie fallen zusammen für $n^2 + m^2\,l^2 = 0$; dies aber tritt nur ein für $n = 0$ und $m\,l = 0$, oder, wenn man die Werte für m und n einsetzt, für

$$k^2 - k - l^2 = 0,$$
$$(2\,k - 1)\,l = 0.$$

Diese Gleichungen sind erfüllt

1) für $k = \frac{1}{2}$, $l = \frac{1}{2}\sqrt{-1}$, ein Fall, der nur für ein imaginäres β eintritt, weswegen wir von ihm absehen können;

2) für $k = 0$, $l = 0$; hierfür würde die Gleichung des von dem beweglichen Scheitel beschriebenen Kreises in die des Coordinatenanfangspunktes, also des festen Scheitels, zusammenschrumpfen: $\xi^2 + \eta^2 = 0$; der Ort der Mittelpunkte würde also völlig unbestimmt, dementsprechend nähme der Ausdruck für $\operatorname{tg}\psi$ $(m = -1,\ n = 0,\ l = 0)$ die Form $\frac{0}{0}$ an. Auch von diesem Fall kann abgesehen werden;

3) für $k = 1$, $l = 0$; dies liefert $m = 1$, $n = 0$, $\operatorname{tg}\psi \equiv t$; in diesem Falle sind die concentrischen Strahlbüschel $\eta = \operatorname{tg}\psi\,.\,\xi$ und $\eta = \operatorname{tg}\varphi\,.\,\xi$ congruent, jeder Strahl ist Doppelstrahl, die Gleichung $2\,m\,l\,t^2 - 4\,n\,t - 2\,m\,l = 0$ ist identisch für jedes t erfüllt. [Mittelpunkt des Ortes von $O' : L\,(\bar{L})$]



Wir wollen dem Büschel $\eta = \operatorname{tg}\psi \cdot \xi$ eine Parallelverschiebung erteilen:

$$\eta - \eta_0 = \operatorname{tg}\psi\,(\xi - \xi_0).$$

Dann wird der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen beider Büschel gefunden, wenn man aus dieser Gleichung und aus $\eta = \operatorname{tg}\varphi \cdot \xi$ oder $\eta = t\,\xi$ das t eliminiert; dies geschieht, wenn man $t = \frac{\eta}{\xi}$ in die letzte Gleichung einsetzt:

$$\eta - \eta_0 = \frac{2\,m\,l\,\xi + (m + m^2 + 4\,n)\,\eta}{m\,(1 + m)\,\xi + 2\,m\,l\,\eta}\,(\xi - \xi_0).$$

Beseitigt man in der Gleichung dieses Kegelschnittes (ein solcher musste bei projektiven Strahlbüscheln ja herauskommen) die Bruchform, so sind die Coefficienten von ξ^2, $2\,\xi\,\eta$ und η^2 bezl.:

$$A = 2\,m\,l,\ B = 2\,n,\ C = -2\,m\,l.$$

$$B^2 - AC = 4\,n^2 + 4\,m^2\,l^2.$$

Dieser für die Natur des Kegelschnitts charakteristische Ausdruck ist nie < 0, im allgemeinen > 0, d. h. der Kegelschnitt ist (wenn dem einen der erzeugenden Strahlbüschel nur eine Parallelverschiebung erteilt wird) stets eine Hyperbel. Die Doppelstrahlen (der concentrischen Büschel) laufen den Asymptoten parallel; denn nach der Verschiebung fallen die Schnittpunkte der nun getrennten Strahlen mit den unendlich fernen Punkten der Hyperbel zusammen. — $B^2 - AC = 0$ tritt ein für $m\,l = 0$, $n = 0$. Von den oben besprochenen Fällen, in denen dies möglich ist, kommt nur der dritte in Betracht: $l = 0$, $m = 1$, $n = 0$. Da die entsprechenden Strahlen nach der Verschiebung sämtlich parallel sind, so liegen alle Punkte der erzeugten Curve unendlich fern. Da aber die Strahlen des Doppelstrahls $\eta = \frac{\eta_0}{\xi_0}\,\xi$ auch noch nach der Verschiebung zusammenfallen, also auch alle im Endlichen gelegenen Punkte gemein haben, so liefert unsre Rechnung auch noch diese Gerade.

b) Von zwei perspektiv gelegenen geraden Punktreihen habe die eine einen festen, die andre einen beweglichen Träger. Der perspektive Durchschnitt soll sich auf einer festen Geraden

bewegen können. Welche Curve umhüllt der bewegliche Träger, wenn der perspektive Durchschnitt die feste Gerade durchläuft?

(Fig. 5.) Wir wählen den festen Träger zur Abscissenaxe, den Schnittpunkt O desselben mit der Geraden g, auf der sich der perspektive Durchschnitt bewegen soll, zum Coordinatenanfangspunkt und eine Senkrechte zur Abscissenaxe im Punkte O zur vorläufigen Ordinatenaxe. Der Winkel, den g mit der Abscissenaxe bildet, sei α. Die projektive Beziehung zwischen den Punktreihen sei bestimmt durch die Zuordnung der Punkte O und O′, E und E′, U und U′, und zwar seien die Strecken

$$OE = 1, \quad OU = \infty, \ (EU = \infty),$$
$$O'E' = d_1, \ O'U' = d, \ (E'U' = d - d_1 = d_2).$$

Der bewegliche Träger habe die Gleichung

$$\frac{\xi}{s} + \frac{\eta}{t} = 1.$$

Die Geraden OO′, EE′, UU′ haben der Reihe nach die Gleichungen

$$\eta \cos\alpha = \xi \sin\alpha; \quad \eta \cos\mu = (\xi - 1)\sin\mu; \quad \eta = y,$$

wenn μ den Winkel bedeutet, den EE′ mit der Abscissenaxe bildet, y den jeweiligen Abstand der parallel zur Abscissenaxe verlaufenden Geraden UU′ von der letzteren.

Die Punktreihen liegen perspektiv, wenn diese drei Geraden sich in einem Punkte schneiden, dies aber erfordert

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \cos\mu & \sin\mu & -\sin\mu \\ 1 & 0 & y \end{vmatrix} \equiv \cos\alpha \sin\mu \, y - \sin\alpha (y \cos\mu + \sin\mu) = 0.$$

Wir berechnen nun die Coordinaten der Punkte O′ (welcher natürlich auf der Geraden g liegen muss), E′ und U′ als der Schnittpunkte der drei obigen Geraden mit dem Träger der beweglichen Punktreihe $\frac{\xi}{s} + \frac{\eta}{t} = 1$. Man findet folgende Werte:

$$\xi_0 = \frac{s\,t\,\cos\alpha}{t\cos\alpha + s.\sin\alpha}, \quad \eta_0 = \frac{s\,t\,\sin\alpha}{t\cos\alpha + s.\sin\alpha};$$

$$\xi_1 = \frac{s(t\cos\mu + \sin\mu)}{t\cos\mu + s\sin\mu}, \quad \eta_1 = \frac{t(s-1)\sin\mu}{t\cos\mu + s\sin\mu};$$

$$\xi_\infty = \frac{s(t-y)}{t}, \qquad \eta_\infty = y.$$

Mittels dieser Werte drücken sich die constanten Abstände dieser Punkte folgendermassen aus:

$$d^2 = (\xi_0 - \xi_\infty)^2 + (\eta_0 - \eta_\infty)^2 =$$

$$= \frac{(s^2+t^2)[s(y-t)\sin\alpha + y\,t\cos\alpha]^2}{t^2(t\cos\alpha + s\sin\alpha)^2},$$

$$d_1^2 = (\xi_0 - \xi_1)^2 + (\eta_0 - \eta_1)^2 =$$

$$= \frac{(s^2+t^2)[s\,t\sin(\mu-\alpha) - \sin\mu(t\cos\alpha + s\sin\alpha)]^2}{(t\cos\alpha + s\sin\alpha)^2(t\cos\mu + s\sin\mu)^2}.$$

Setzt man noch $\operatorname{tg}\alpha = a$, $\operatorname{tg}\mu = m$, so berechnen sich aus diesen beiden Gleichungen y und m zu:

$$y = t\,\frac{a\,s\sqrt{s^2+t^2} - d(t+a\,s)}{\sqrt{s^2+t^2}\,(t+a\,s)},$$

$$m = t\,\frac{-a\,s\sqrt{s^2+t^2} + d_1(t+a\,s)}{\sqrt{s^2+t^2}\,(t+a\,s-s\,t) - d_1 s(t+a\,s)}.$$

Trägt man diese Werte in die Gleichung

$$\cos\alpha\sin\mu\,y - \sin\alpha(y\cos\mu + \sin\mu) = 0$$

oder:

$$\operatorname{tg}\mu\,y - a(\operatorname{tg}\mu + y) = 0$$

ein, so werden μ und y eliminiert, und die Gleichung wird zu einer Beziehung zwischen den Liniencoordinaten s und t des beweglichen Trägers, d. h. zu der Gleichung der Geradenschar, welche die gesuchte Curve umhüllt. Dieselbe lautet:

$$\frac{t(t+a\,s)\left[d\,d_1(t+a\,s) - a(d_1 s + d - d_1)\sqrt{s^2+t^2}\right]}{\left[(t+a\,s-s\,t)\sqrt{s^2+t^2} - d_1 s(t+a\,s)\right]\sqrt{s^2+t^2}} = 0.$$

Das Verschwinden der linken Seite wird im allgemeinen weder durch $t=0$, noch durch $t+a\,s=0$ hervorgerufen. Denn $t=0$ hätte $y=0$ und $m=0$ zur Folge; $t+a\,s=0$ würde liefern $y=\frac{t\,a\,s}{0}$, müsste also $t\,a\,s=0$ oder $s\,t=0$ fordern, was im Verein mit $t+a\,s=0$ auch den Nenner verschwinden liesse; oder es lieferte $m=a$, d. h. das Perspektivitätscentrum läge stets im Unendlichen. Somit bleibt

als Gleichung der Geradenschar, welche von dem Träger der beweglichen Punktreihe durchlaufen wird,

$$s^2 + t^2 = \frac{d^2 d_2^2 (t + a s)^2}{a^2 (d_1 s + d_2)^2}.$$

Jetzt machen wir den Punkt $0 \mid -\frac{d_2}{d_1}$ zum Coordinatenanfangspunkt, die durch denselben gehende Parallele zur Geraden g zur Ordinatenaxe (Fig. 6), nennen s′, t′ die neuen, den s, t entsprechenden Axensegmente, und finden:

$$s'^2 + t'^2 - 2 s' t' \cos\alpha = d^2,$$

d.h.: Die zwischen unsren jetzigen Coordinatenaxen gelegenen Abschnitte des beweglichen Trägers haben stets dieselbe Grösse, nämlich d.

Dieses Resultat ist auch eines geometrischen Beweises fähig (Fig. 7). Die Punktreihen O′, E′, U′ und O, E, U befinden sich in perspektiver Lage. Zu der Geraden OO′ ziehe ich eine Parallele durch den Punkt R mit der auf der Geraden OU gemessenen Abscisse $-\frac{d_2}{d_1}$. Ich behaupte, die Strecke TS′, welche durch diese Parallele und die Gerade OU auf der Geraden O′U′ abgeschnitten wird, ist gleich O′U′ = d. — Es ist

$$O'U' = d, \quad O'E' = d_1, \quad E'U' = d_2 = d - d_1;$$
$$O'T = u, \quad TU' = TO' + O'U' = -u + d.$$

Dies in die Doppelverhältnisgleichung

$$\frac{OT}{OE} : \frac{TU}{EU} = \frac{O'T}{O'E'} : \frac{TU'}{EU'}$$

eingetragen, liefert:

$$\frac{OT}{1} : 1 = \frac{u}{d_1} : \frac{d-u}{d_2}; \quad OT = \frac{u\, d_2}{d_1 (d-u)}.$$

Nun verhält sich

$$TS' : O'T = TR : OT$$

$$TS' = \frac{TR . O'T}{OT} = \frac{TO + OR}{OT} u = -u + \frac{OR}{OT} u =$$

$$= -u + \frac{-\frac{d_2}{d_1}}{\frac{u\, d_2}{d_1 (d-u)}} u = -u - (d-u) = -d.$$

Der absolute Betrag von TS′ ist also in der That gleich d.

Die Curve, welche von der Geradenschar

$$s'^2 + t'^2 - 2\,s'\,t'\cos\alpha = d^2$$

umhüllt wird, hat etwa die Lage und Gestalt, wie sie die Fig. 8 zeigt. Unter allen derartigen Curven, welche herauskommen, wenn α von $0 - 2\pi$ läuft, ist diejenige für $\alpha = \frac{\pi}{2}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ ausgezeichnet. Ihre Spitzen liegen auf den Axen, in der Entfernung d von dem Schnittpunkte derselben.

Wir wollen die Gleichung unsrer Geradenschar transformieren auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Axen die Halbierungslinien des Winkels α und seines Nebenwinkels sein sollen (Fig. 9). In dem bisherigen System lautete die Gleichung einer beliebigen Geraden

$$\frac{\xi'}{s'} + \frac{\eta'}{t'} = 1.$$

Diese transformieren wir auf das neue System mit den Axen Ξ'' und H'', entnehmen hieraus s'' und t'' als Funktionen von s' und t', drücken umgekehrt s' und t' durch s'' und t'' aus und wenden auf die gefundenen Werte die Beziehung $s'^2 + t'^2 - 2\,s'\,t'\cos\alpha = d^2$ an.

Durch Vermittlung des rechtwinkligen Systems $\Xi'\,Y$ findet man leicht folgende Beziehungen zwischen den $\xi' \mid \eta'$ und den $\xi'' \mid \eta''$:

$$\xi' = \frac{1}{2}\left(\frac{\xi''}{\cos\frac{\alpha}{2}} - \frac{\eta''}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right); \qquad \eta' = \frac{1}{2}\left(\frac{\xi''}{\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{\eta''}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Hierdurch geht die Gleichung $\frac{\xi'}{s'} + \frac{\eta'}{t'} = 1$ über in:

$$\frac{\xi''}{s''} + \frac{\eta''}{t''} = \frac{\xi''\sin\frac{\alpha}{2}(s' + t')}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}s'\,t'} + \frac{\eta''\cos\frac{\alpha}{2}(s' + t')}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}s'\,t'} = 1,$$

woraus wir entnehmen:

$$s' = \frac{s''\,t''}{\cos\frac{\alpha}{2}t'' - \sin\frac{\alpha}{2}s''}; \qquad t' = \frac{s''\,t''}{\cos\frac{\alpha}{2}t'' + \sin\frac{\alpha}{2}s''}.$$

Mittels dieser Ausdrücke wird die Gleichung

$$s'^2 + t'^2 - 2\,s'\,t'\cos\alpha = d^2$$

zu:

$$\sin^2\alpha\; s''^2\,t''^2\,(s''^2 + t''^2) = d^2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}\,t''^2 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\,s''^2\right)^2.$$

Da diese Gleichung in gleicher Weise für s'' und $-s''$, sowie für t'' und $-t''$ gilt, so folgt, dass unsre Geradenschar und also auch die von ihr umhüllte Curve sowohl zur Halbierungslinie des Winkels α, als auch zu derjenigen seines Nebenwinkels symmetrisch liegt.

Die Curven der Schar, welche aus $s'^2+t'^2-2s't'\cos\alpha = d^2$ entsteht, wenn α Parameter ist, haben einen gemeinsamen Mittelpunkt mit den im ursprünglichen $\xi\,|\,\eta$ - System gemessenen Coordinaten $-\frac{d_2}{d_1}\,|\,0$. Wir wollen nun fragen: Wie ändert sich die Lage dieses Mittelpunktes, wenn das Perspektivitätscentrum sich auf einer Geraden bewegt, die nicht (wie g) gerade durch den Punkt O geht, sondern durch einen andern Punkt P des festen Trägers? (Fig. 10.) Mit andern Worten: Nach welchem Gesetz sind der Curvenmittelpunkt R und der Punkt P einander zugeordnet?

Wählen wir P zum Nullpunkt, Q zum Einheitspunkt der festen Punktreihe, so ist $PQ = OE = 1$. Entsprechende Punkte sind jetzt P und P′, Q und Q′, U und U′ (nach wie vor natürlich auch O und O′, E und E′), und zwar sei
$OP = p, \quad PQ = 1, \quad QU = \infty,$
$O'P' = p', \quad P'Q' = d_1', \quad Q'U' = d_2'. \quad (O'U' = d, \quad P'U' = d').$
PR, die Abscisse von R in Bezug auf P, hat jetzt den Wert $-\frac{d_2'}{d_1'}$. Wir haben also d_2' und d_1' als Funktionen von p, d_1, d_2 (und d) zu berechnen. Es ist:

$$\frac{OP}{PU} : \frac{OE}{EU} = \frac{O'P'}{P'U'} : \frac{O'E'}{E'U'}$$

oder:

$$p = \frac{p'}{d_1' + d_2'} : \frac{d_1}{d_2}.$$

Ersetzt man die Punkte P und P′ durch Q und Q′, so erhält man:

$$p + 1 = \frac{p' + d_1'}{d_2'} : \frac{d_1}{d_2}.$$

Dazu tritt

$$p' = d - d' = d - (d_1' + d_2').$$

Aus diesen drei Gleichungen ist p' zu eliminieren, d_1' und d_2' zu berechnen. Setzt man den Wert von p', welchen die dritte Gleichung liefert, in die beiden andern ein, so folgt

$$d_2' = \frac{d\,d_2}{p\,d_1 + d}.$$

$$d_1' = \frac{d\,d_1 d_2}{(p\,d_1 + d)\,(p\,d_1 + d_2)}.$$

Mithin ist $PR = -\frac{d_2'}{d_1'} = -\frac{p\,d_1 + d_2}{d_1}$, und OR, die Abscisse von R in Bezug auf unsren alten Coordinatenanfangspunkt O:

$$OR = OP + PR = p - \frac{p\,d_1 + d_2}{d_1} = -\frac{d_2}{d_1}.$$

Diese Abscisse aber hatte auch der Mittelpunkt der alten Curvenschar. Wir haben also das interessante Resultat, dass der Mittelpunkt der von dem beweglichen Träger umhüllten Curven bei der Bewegung von P auf dem festen Träger invariant bleibt.

Betrachten wir dagegen einen andern Punkt, der für die Curvenschar charakteristisch ist, welche bei veränderlichem α von den Geraden $s'^2 + t'^2 - 2\,s'\,t'\cos\alpha = d^2$ eingehüllt wird, nämlich eine Spitze der ausgezeichneten Curve, die bei $\alpha = \frac{\pi}{2}$ herauskommt. Nehmen wir z. B. die in positiver Richtung vom Mittelpunkt aus auf der Abscissenaxe gelegene. Sie hat von dem festen Mittelpunkte R die Entfernung

$$d' = d_1' + d_2' = \frac{d\,d_2}{p\,d_1 + d_2}.$$

Von demselben Punkte hat P die Entfernung

$$RP = \frac{p\,d_1 + d_2}{d_1}$$

Das Produkt dieser beiden Abstände ist constant:

$$d' \,.\, RP = \frac{d\,d_2}{d_1}.$$

d. h. jene Spitzen bilden eine Punktreihe, die der auf demselben Träger (der Abscissenaxe) angeordneten der Punkte P projektiv zugeordnet ist, denn ihre Abscissen $d' = \sigma$ und $RP = \pi$ stehen ja in rationaler, algebraischer Abhängigkeit voneinander:

$$\sigma = \frac{d\,d_2}{d_1\,\pi}.$$

Zieht man durch R eine beliebige, gegen die Abscissenaxe geneigte Gerade und trägt auf ihr die Strecken σ von R aus ab, auf der Abscissenaxe die Strecken π, so umhüllen die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte eine Hyperbel, deren Asymptoten die Träger der σ und π sind.

III.

a) (Fig. 11.) Zwei Strahlbüschel befinden sich in perspektiver Lage. Auf dem perspektiven Durchschnitte werden zwei Punkte A und B festgehalten, sodass die einander zugeordneten Strahlen S_1A und S_2A stets durch A, S_1B und S_2B stets durch B gehen sollen, während die Strahlbüschel im übrigen beweglich sind. Dann entspricht jeder Lage des Scheitels S_1 eine Lage von S_2; in welcher Weise sind S_1 und S_2 einander zugeordnet?

Die Bewegung der Scheitel erfolgt offenbar auf zwei Kreisen; dieselben mögen ihrer Lage und Grösse nach bestimmt sein durch die ihnen angehörigen Punkte A, B und C_1, bezw. A, B und C_2, wobei C_1 und C_2 entsprechende Punkte sein sollen, d. h. S_1C_1 und S_2C_2 ein drittes Paar entsprechender Strahlen; durch die Zuordnungen S_1A und S_2A, S_1B und S_2B, S_1C und S_2C ist die projektive Beziehung der Strahlbüschel auf einander bestimmt. Wir wählen die gemeinsame Centrale der Kreise zur Abscissen-, den perspektiven Durchschnitt (die gemeinsame Sehne der Kreise) zur Ordinatenaxe. Die Gleichungen der Kreise mögen lauten

$$(\xi - d_1)^2 + \eta^2 = r_1^2; \qquad (\xi - d_2)^2 + \eta^2 = r_2^2.$$

Die Punkte C_1 und C_2 mögen bezl. die Coordinaten $\xi_1 | \eta_1$ und $\xi_2 | \eta_2$ haben. Die Strahlen S_1C_1 und S_2C_2 müssen sich bei perspektiver Lage der Büschel in einem Punkte E unsrer Ordinatenaxe schneiden, derselbe habe die Ordinate y. Bei der Bewegung der Scheitel S_1 und S_2 auf ihren Kreisen bleiben die Punkte C_1 und C_2 an ihrer Stelle, während E sich längs des perspektiven Durchschnittes bewegt; jeder

Lage von E entspricht eine und nur eine Lagenzuordnung von S_1 und S_2. Die Gleichungen der Strahlen S_1C_1 und S_2C_2 lauten nun:

$$\frac{\eta - \eta_1}{\xi - \xi_1} = \frac{\eta - y}{\xi}; \qquad \frac{\eta - \eta_2}{\xi - \xi_2} = \frac{\eta - y}{\xi}.$$

Da C_1 auf dem ersten, C_2 auf dem zweiten Kreise liegt, müssen die Identitäten bestehen

$$(\xi_1 - d_1)^2 + \eta_1^2 \equiv r_1^2; \qquad (\xi_2 - d_2)^2 + \eta_2^2 \equiv r_2^2.$$

Endlich ist noch

$$r_1^2 - d_1^2 = r_2^2 - d_2^2 = p^2.$$

Hieraus ergiebt sich die Abscisse von S_1

$$\xi' = \xi_1 \frac{y^2 - (r_1^2 - d_1^2)}{\xi_1^2 + (\eta_1 - y)^2} = \xi_1 \frac{y^2 - p^2}{\xi_1^2 + (\eta_1 - y)^2}.$$

Wird dieser Wert in den Ausdruck für η eingesetzt, so erhält man:

$$\eta' = y + (\eta_1 - y) \frac{y^2 - p^2}{\xi_1^2 + (\eta_1 - y)^2}.$$

Ebenso erhält man als Coordinaten von S_2:

$$\xi'' = \xi_2 \frac{y^2 - p^2}{\xi_2^2 + (\eta_2 - y)^2}; \quad \eta'' = y + (\eta_2 - y) \frac{y^2 - p^2}{\xi_2^2 + (\eta_2 - y)^2}.$$

Wir wollen nun fragen nach dem Verhalten der Verbindungslinie der beiden Scheitel, wenn diese bei perspektiver Lage der Strahlbüschel ihre Bewegung längs der Kreise ausführen. Die Gleichung dieser Geraden S_1S_2 lautet:

$$\frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'} = \frac{\eta - \eta''}{\xi - \xi''}, \text{ oder: } \xi(\eta'' - \eta') - \eta(\xi'' - \xi') = \xi'\eta'' - \xi''\eta'.$$

Setzt man die für ξ', η', ξ'', η'' berechneten Werte ein, so tritt auf beiden Seiten der Gleichung der Faktor $y^2 - p^2$ heraus; derselbe kann gestrichen werden, da der Fall $y = \pm p$ natürlich auch in der noch bleibenden Gleichung enthalten ist. Diese Gleichung lautet dann:

$$\xi \left\{ [\eta_2(\xi_1^2 + \eta_1^2) - \eta_1(\xi_2^2 + \eta_2^2)] - y[(\xi_1^2 + \eta_1^2) - (\xi_2^2 + \eta_2^2)] + y^2(\eta_1 - \eta_2) \right\} -$$
$$- \eta \left\{ [\xi_2(\xi_1^2 + \eta_1^2) - \xi_1(\xi_2^2 + \eta_2^2)] - 2y(\eta_1\xi_2 - \eta_2\xi_1) - y^2(\xi_1 - \xi_2) \right\} =$$
$$= p^2(\eta_1\xi_2 - \eta_2\xi_1) - y[\xi_2(\xi_1^2 + \eta_1^2) - \xi_1(\xi_2^2 + \eta_2^2) - p^2(\xi_1 - \xi_2)] + y^2(\eta_1\xi_2 - \eta_2\xi_1).$$

Das von y unabhängige Glied in der ersten $\{\}$ werde mit a_0, das in der zweiten $\{\}$ mit $-b_0$ und dasjenige auf

der rechten Seite mit $-c_0$ bezeichnet, die Coefficienten von y mit $-a_1$, b_1 und c_1, diejenigen von y^2 mit a_2, b_2 und $-c_2$. Dann lautet die nach Potenzen von y geordnete Gleichung:
$(a_0\xi + b_0\eta + c_0) + y(a_1\xi + b_1\eta + c_1) + y^2(a_2\xi + b_2\eta + c_2) = 0.$

Die Gleichung der Einhüllenden dieser Geradenschar lautet:

$$(a_1\xi + b_1\eta + c_1)^2 = 4(a_0\xi + b_0\eta + c_0)(a_2\xi + b_2\eta + c_2).$$

Dies aber ist die Gleichung eines Kegelschnittes. Die Punkte S_1 und S_2 sind also in der Weise einander zugeordnet, dass ihre Verbindungslinie stets Tangente eines gewissen Kegelschnitts ist.

Besondere Beachtung verdient der Specialfall $\eta_1 = \eta_2 = 0$. Hierfür lautet die Gleichung der Geradenschar:

$$\xi_1\xi_2\eta + y[(\xi_1 + \xi_2)\xi - (\xi_1\xi_2 - p^2)] - y^2\eta = 0,$$

diejenige der Einhüllenden:

$$[(\xi_1 + \xi_2)\xi - (\xi_1\xi_2 - p^2)]^2 + 4\xi_1\xi_2\eta^2 = 0$$

oder:

$$(\xi_1 + \xi_2)\xi \pm 2\eta\sqrt{-\xi_1\xi_2} = \xi_1\xi_2 - p^2.$$

Das sind zwei Geraden, die reell sind für $\xi_1\xi_2 \leqq 0$, imaginär für $\xi_1\xi_2 > 0$. Sie schneiden sich, einerlei ob sie reell oder imaginär sind, in dem reellen Punkte

$$\xi = \frac{\xi_1\xi_2 - p^2}{\xi_1 + \xi_2}, \qquad \eta = 0.$$

Diese Geraden gehören aber selbst zu der obigen Schar, nämlich für den Parameterwert $y = \pm\sqrt{-\xi_1\xi_2}$, und alle Individuen dieser Schar schneiden sich in demselben Punkte der Abscissenaxe, wie man sich leicht überzeugt, sobald man in der Gleichung der Schar $\eta = 0$ setzt. In diesen Punkt ist der Kegelschnitt des allgemeinen Falles zusammengeschrumpft. Dass die beiden genannten Geraden besonders aus der Schar heraustreten, hat seinen Grund in Folgendem. Bildet man die Discriminante der in y quadratischen Gleichung

$$\xi_1\xi_2\eta + y[(\xi_1 + \xi_2)\xi - (\xi_1\xi_2 - p^2)] - y^2\eta = 0,$$

so erhält man gerade

$$[(\xi_1 + \xi_2)\xi - (\xi_1\xi_2 - p^2)]^2 + 4\xi_1\xi_2\eta^2.$$

Dieser Ausdruck verschwindet eben für die Punkte jener beiden Geraden, d. h. den letzteren entsprechen Doppelwerte

von y, nämlich $y = \pm\sqrt{-\xi_1\xi_2}$; das auf die Gleichung der Geradenschar angewandte Eliminationsverfahren liefert aber bekanntlich ausser der Einhüllenden auch alle Örter, in denen der Parameter mehrfache Werte besitzt.

Der Richtungsfaktor der Geraden

$$\xi_1\xi_2\eta + y\left[(\xi_1 + \xi_2)\xi - (\xi_1\xi_2 - p^2)\right] - y^2\eta = 0$$

nimmt für $y = \pm\sqrt{-\xi_1\xi_2}$ extreme Werte an vom Betrage

$$m = \pm\frac{\xi_1 + \xi_2}{2\sqrt{-\xi_1\xi_2}}.$$

Es liegt nahe, nach der geometrischen Bedeutung des ausgezeichneten Punktes

$$\xi = \frac{\xi_1\xi_2 - p^2}{\xi_1 + \xi_2}, \qquad \eta = 0$$

und der ausgezeichneten Geraden

$$(\xi_1 + \xi_2)\xi \pm 2\eta\sqrt{-\xi_1\xi_2} = \xi_1\xi_2 - p^2,$$

denen extreme Werte des Richtungsfaktors zukommen, zu fragen. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass diese Geraden gemeinsame Tangenten unsrer beiden Kreise sind, der Schnittpunkt also einer der beiden sogenannten Ähnlichkeitspunkte derselben. Damit die Gerade

$$\eta = m(\xi - \xi_0) \qquad \left(\xi_0 = \frac{\xi_1\xi_2 - p^2}{\xi_1 + \xi_2}\right)$$

Tangente des Kreises

$$(\xi - d_1)^2 + \eta^2 = r_1^2$$

sei, ist notwendig und hinreichend, dass

$$m^2 = \frac{r_1^2}{(\xi_0 - d_1)^2 - r_1^2}$$

sei. Dies liefert, übereinstimmend mit der Gleichung unsrer Geraden,

$$m^2 = \frac{(\xi_1^2 + p^2)^2}{\frac{(\xi_2 - \xi_1)^2(\xi_1^2 + p^2)^2}{(\xi_1 + \xi_2)^2} - (\xi_1^2 + p^2)^2} = \frac{(\xi_1 + \xi_2)^2}{-4\xi_1\xi_2}.$$

Dasselbe erhält man für den Richtungsfaktor der von demselben Punkte $\xi_0 \mid 0$ aus an den zweiten Kreis zu legenden Tangente, womit das oben Behauptete bewiesen ist. Ist $\xi_1\xi_2 < 0$, so ist $\xi_0 \mid 0$ der äussere, ist $\xi_1\xi_2 > 0$, so ist dieser Punkt der innere Ähnlichkeitspunkt (Schnittpunkt der imaginären inneren Tangenten).

b) (Fig. 12.) Zwei gerade Punktreihen befinden sich in perspektiver Lage. Zwei durch das Perspektivitätscentrum O gehende Strahlen OA und OB werden festgehalten, sodass die einander zugeordneten Punkte A_1 und A_2 stets auf OA, B_1 und B_2 stets auf OB liegen, während im übrigen die Punktreihen beweglich sind. Dann entspricht jeder Lage des einen Trägers eine Lage des andern; in welcher Weise sind die Träger einander zugeordnet?

Wir wählen zur Abscissenaxe die Halbierungslinie des Winkels 2α, den die Strahlen OA und OB miteinander bilden, zur Ordinatenaxe diejenige seines Nebenwinkels. In Bezug auf diese Axen seien die Gleichungen der Träger A_1B_1 und A_2B_2 in ihrer Normalform:

$$\xi \cos\varphi_1 + \eta \sin\varphi_1 = d_1, \qquad \xi \cos\varphi_2 + \eta \sin\varphi_2 = d_2,$$

die Gleichungen der festen Strahlen OA und OB:

$$\eta = \xi \operatorname{tg}\alpha, \qquad \eta = -\xi \operatorname{tg}\alpha.$$

Dann sind die Coordinaten von A_1:

$$\frac{d_1 \cos\alpha}{\cos(\varphi_1 - \alpha)} \;\Bigg|\; \frac{d_1 \sin\alpha}{\cos(\varphi_1 - \alpha)},$$

diejenigen von B_1:

$$\frac{d_1 \cos\alpha}{\cos(\varphi_1 + \alpha)} \;\Bigg|\; \frac{-d_1 \sin\alpha}{\cos(\varphi_1 + \alpha)}.$$

Hiernach drückt sich die constante Länge m_1 der Strecke A_1B_1 folgendermassen aus:

$$m_1 = \frac{d_1 \sin 2\alpha}{\cos(\varphi_1 + \alpha)\cos(\varphi_1 - \alpha)},$$

oder:

$$d_1 = \frac{m_1 \cos(\varphi_1 + \alpha)\cos(\varphi_1 - \alpha)}{\sin 2\alpha}.$$

Die Gleichung von A_1B_1 kann mithin geschrieben werden:

$$\xi \cos\varphi_1 + \eta \sin\varphi_1 = M_1 (\cos 2\varphi_1 + \cos 2\alpha).$$

Die Gleichung von A_2B_2 gestaltet sich in ähnlicher Weise zu:

$$\xi \cos\varphi_2 + \eta \sin\varphi_2 = M_2 (\cos 2\varphi_2 + \cos 2\alpha).$$

Bezeichnet man mit ρ_1 die auf A_1B_1 gemessene Entfernung eines beliebigen Punktes dieser Geraden von A_1 aus,

mit ρ_2 die auf A_2B_2 von A_2 aus gemessenen Entfernungen, so muss wegen der projektiven Beziehung der beiden Punktreihen, und weil $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 0$ und $\rho_1 = m_1$, $\rho_2 = m_2$ einander zugeordnet sind, bei willkürlichem γ

$$\rho_2 = \frac{m_2 \rho_1}{\gamma(\rho_1 - m_1) + m_1}$$

sein. In bequemerer Form lautet diese Beziehung:

$$\gamma \rho_1 \rho_2 - \gamma m_1 \rho_2 = m_2 \rho_1 - m_1 \rho_2.$$

Bei perspektiver Lage der Punktreihen müssen die Schnittpunkte E_1 und E_2 der Träger und des Strahles OX einander entsprechen; sei $A_1E_1 = \bar{\rho}_1$, $A_2E_2 = \bar{\rho}_2$. Nun haben die Punkte A_1 und E_1 bezüglich die Coordinaten:

$$\frac{m_1 \cos\alpha \cos(\varphi_1 + \alpha)}{\sin 2\alpha} \;\Big|\; \frac{m_1 \sin\alpha \cos(\varphi_1 + \alpha)}{\sin 2\alpha},$$

$$\frac{m_1 \cos(\varphi_1 + \alpha) \cos(\varphi_1 - \alpha)}{\sin 2\alpha \cos\varphi_1} \;\Big|\; 0.$$

Hiernach ist

$$\bar{\rho}_1 = \frac{m_1 \cos(\varphi_1 + \alpha)}{2 \cos\alpha \cos\varphi_1},$$

und ähnlich:

$$\bar{\rho}_2 = \frac{m_2 \cos(\varphi_2 + \alpha)}{2 \cos\alpha \cos\varphi_2}.$$

Wenn diese Werte einander entsprechen sollen, so muss:

$$\frac{\gamma m_1 m_2 \cos(\varphi_1 + \alpha) \cos(\varphi_2 + \alpha)}{4 \cos^2\alpha \cos\varphi_1 \cos\varphi_2} - \frac{\gamma m_1 m_2 \cos(\varphi_2 + \alpha)}{2 \cos\alpha \cos\varphi_2} =$$

$$= \frac{m_1 m_2 \cos(\varphi_1 + \alpha)}{2 \cos\alpha \cos\varphi_1} - \frac{m_1 m_2 \cos(\varphi_2 + \alpha)}{2 \cos\alpha \cos\varphi_2}$$

werden, d. h.

$$(1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi_1)(1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi_2) = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{\gamma} (\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2).$$

Die Gleichung für den Ort des Schnittpunktes der Träger wird gefunden, wenn man aus dieser Gleichung und denen der Träger die Parameter φ_1 und φ_2 eliminiert. Die Gleichungen der Träger mögen noch folgende Umgestaltung erfahren:

$$(\xi + \eta \operatorname{tg}\varphi_1)^2 (1 + \operatorname{tg}^2\varphi_1) = 4 M_1^2 [1 - \sin^2\alpha (1 + \operatorname{tg}^2\varphi_1)]^2$$
$$= N_1 (1 - \operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{tg}^2\varphi_1)^2.$$

Die Parameter φ_1 und φ_2 sind somit aus folgenden drei Gleichungen zu eliminieren:

$$(1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi_1)(1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi_2) = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{\gamma}(\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2),$$

$$(\xi + \eta \operatorname{tg}\varphi_1)^2 (1 + \operatorname{tg}^2\varphi_1) = N_1 (1 - \operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{tg}^2\varphi_2)^2,$$

$$(\xi + \eta \operatorname{tg}\varphi_2)^2 (1 + \operatorname{tg}^2\varphi_2) = N_2 (1 - \operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{tg}^2\varphi_2)^2.$$

Die erste Gleichung liefert $\operatorname{tg}\varphi_2$ als rationale, gebrochene Funktion von $\operatorname{tg}\varphi_1$, Zähler und Nenner sind linear; würde diese Funktion an die Stelle von $\operatorname{tg}\varphi_2$ in die dritte Gleichung eingesetzt, so wäre noch $\operatorname{tg}\varphi_1$ aus zwei Gleichungen zu eliminieren, deren jede in diesem Parameter biquadratisch wäre; die Resultante wäre also eine Funktion 16. Grades in den Coefficienten; diese Coefficienten aber sind in ξ und η wieder vom zweiten Grad, sodass die Curve, deren Gleichung auf diese Weise hergestellt wäre, als vom 32. Grad sich herausstellte.

Diese Curve besitzt in O einen Mittelpunkt, denn wenn man ξ durch $-\xi$ und gleichzeitig η durch $-\eta$ ersetzt, ändern sich die Gleichungen nicht; sie ändern sich auch nicht, wenn man η durch $-\eta$ und φ durch $-\varphi$ ersetzt, oder wenn man ξ durch $-\xi$ und φ durch $\pi-\varphi$ ersetzt, d. h. die Curve besitzt in den Coordinatenaxen zwei zu einander senkrechte Symmetrielinien.

Lebenslauf.

Geboren am 22. Oktober 1872 zu Giessen als Sohn des Kaufmanns Fr. E. Loos, besuchte ich von Ostern 1879 an die Vorschule, von Ostern 1882 an das Realgymnasium zu Giessen. Von dieser Anstalt erhielt ich das Zeugnis der Reife am 6. März 1891. Meinen verehrten Lehrern Herren Direktor Weihrich und Dr. Scheuermann verdanke ich die Liebe zur Mathematik, die mich veranlasste, mich auf der Universität meiner Vaterstadt dem Studium dieser Wissenschaft zu widmen. Hier waren meine Lehrer die Herren Prf. Prf. Dr. Dr. Pasch, Netto, Heffter, Himstedt, Fromme, Sievers, Ule, Behaghel, Siebeck und Schiller. Ich bestand die Prüfung für das höhere Lehramt am 9. März 1895.

Die Anregung zu der vorliegenden Arbeit, sowie manche wichtige Ratschläge bei der Anfertigung derselben verdanke ich Herrn Prf. Dr. Netto, welchem hiermit meinen Dank auszusprechen mir eine angenehme Pflicht ist.

Giessen, den 24. Dezember 1895.

Wilhelm Loos.

